CHAPITRE B : SUITES DE FONCTIONS

HEI 2 - 2015/2016 - A. RIDARD

Prérequis :

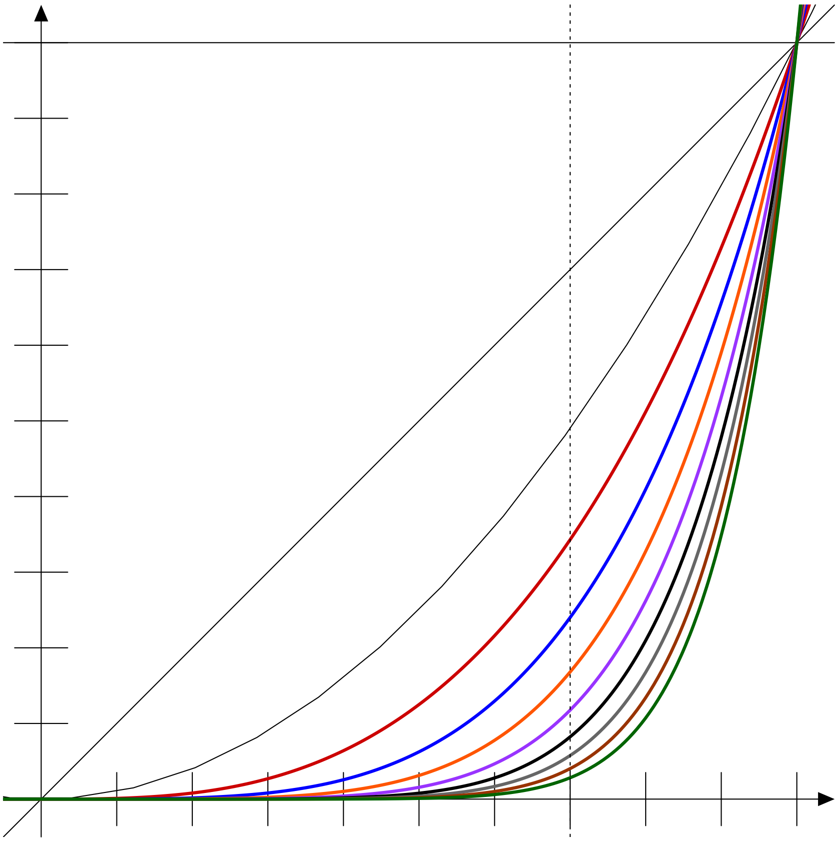
- Suites numériques, suites dans un evn
- Variations de fonctions, majorations
- Continuité, dérivation
- Intégration sur un segment, intégrales généralisées

Table des matières

Dans ce chapitre, D représente une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{F}(D,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

I. Introduction

Représentons les premiers termes de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0,1[$.



Quel sens pouvons-nous donner à « (f_n) converge vers la fonction nulle sur $[0,1[$ » ?

II. Deux types de convergence

Dans cette section, (f_n) désigne une suite de fonctions de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Convergence simple

Définition (Convergence simple et limite simple sur D)**.**

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur D vers $f \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$ si :

$$\forall x \in D, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

f est alors appelée la limite simple de (f_n) sur D.

Remarque. On dit que (f_n) converge simplement sur D s'il existe une fonction f telle que (f_n) converge simplement sur D vers f.

Exemple. Considérons la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Elle converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle.
Converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? Si oui, vers quelle fonction ?

Définition (Domaine de convergence simple)**.**

Le domaine de convergence simple de la suite de fonctions (f_n) est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

Exemples. Déterminer le domaine de convergence simple D et la limite simple f sur D. Les fonctions f_n étant définies sur $\mathbb{R}$.
- $f_n(x) = x^n$
- $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$
- $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$
- $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
- $f_n(x) = e^{-x^n}$
- $f_n(x) = e^{-nx}$

2. Convergence uniforme

Définition (Convergence uniforme et limite uniforme sur D)**.**

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur D vers $f \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$ si :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

f est alors appelée la limite uniforme de (f_n) sur D.

Remarques.
- On dit que (f_n) converge uniformément sur D s'il existe une fonction f telle que (f_n) converge uniformément sur D vers f
- **La suite numérique de terme général** $u_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ **ne dépend pas de** x
- Cette **définition** fournit une **condition nécessaire et suffisante** [1]
- La convergence uniforme sur D entraîne la convergence uniforme sur tout $D' \subset D$
- La convergence uniforme sur D_1 et sur D_2 entraîne la convergence uniforme sur $D_1 \cup D_2$

Exemples (En déterminant le sup)**.**
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle converge uniformément sur tout $[0,a] \subset [0,1[$ vers la fonction nulle.
  ⚠ Elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{x+n}{n+4nx^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$.

[1]. Toutes les définitions fournissent des conditions nécessaires et suffisantes. Certains auteurs préfèrent d'ailleurs utiliser « si et seulement si »

Remarque. La convergence uniforme sur D correspond à la convergence dans l'evn $(\mathscr{F}(D,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Propriété (Une condition nécessaire de convergence uniforme sur D)**.**

Pour que (f_n) converge uniformément sur D vers f, **il faut** qu'elle converge simplement sur D vers f.

⚠ Cette condition n'est pas suffisante

Remarque. En général, pour étudier la convergence uniforme sur D, on détermine d'abord la limite simple sur D.

Propriété (Une condition suffisante de convergence uniforme sur D)**.**

Pour que (f_n) converge uniformément sur D vers f, **il suffit** que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \qquad \text{où } (\alpha_n) \text{ désigne une suite numérique qui converge vers } 0$$

⚠ On majore $|f_n(x) - f(x)|$ et non $|f_n(x)|$

Remarques.
- **La suite** (α_n) **ne dépend pas de** x
- On peut se contenter d'une majoration à partir d'un certain rang

Exemples.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (déjà vu). Il suffit en effet de majorer par $\frac{1}{n}$ (savez-vous le justifier ?).
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Il suffit en effet de majorer par $\frac{1}{n^2}$.

Propriété (Une condition suffisante de **non** convergence uniforme sur D)**.**

Pour que (f_n) ne converge pas uniformément sur D vers f, **il suffit** qu'il existe une suite numérique (x_n) de D telle que $\lim_{n\to+\infty} \left(f_n(x_n) - f(x_n)\right) \neq 0$.

Remarque. Si (f_n) ne converge pas uniformément sur D vers sa limite simple f, alors elle ne converge pas uniformément sur D.

Exemples.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ (déjà vu). Il suffit en effet de considérer la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ de $[0,1]$.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Il suffit en effet de considérer la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = e^{-nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, et sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]-1, 1]$.

III. Etude de la limite d'une suite de fonctions

Dans cette section, I désigne un intervalle contenant au moins deux points et (f_n) une suite de fonctions définies sur I.

1. Continuité

Propriété (Théorème de continuité)**.**

Si
- les f_n sont continues sur I
- la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I (ou sur tout $[a,b] \subset I$) vers f

Alors
f est continue sur I

Remarques.
- En général, il est plus facile de montrer la continuité de f à partir de son expression qui est explicite, contrairement à celle de la somme d'une série de fonctions (cf. le prochain chapitre) !
- Par contre, la contraposée [2] de ce théorème fournit une méthode pratique pour démontrer la non convergence uniforme sur I.

Exemples.
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ (déjà vu deux fois). En effet, les f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la limite simple f sur $[0,1]$ n'est pas continue en 1 (savez-vous le justifier ?)
- On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

2. Dérivabilité

Propriété (Théorème de dérivation)**.**

Si
- les f_n sont dérivables sur I
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f
- la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur I (ou sur tout $[a,b] \subset I$) vers g

Alors
- f est dérivable sur I
- $\forall x \in I,\ f'(x) = g(x)$ autrement dit « la dérivée de la limite est la limite des dérivées ».

Remarques.
- On peut remplacer « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^1$ »
- Comme pour la continuité, f étant explicite, ce résultat est surtout utile pour dériver la somme d'une série de fonctions qui, elle, n'est pas explicite en général.

3. Intégration

Propriété (Théorème d'intégration sur un segment)**.**

Si
- les f_n sont continues sur $[a,b]$
- la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f

Alors
$\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$ autrement dit « l'intégrale de la limite est la limite des intégrales ».

Remarque. Comme pour la continuité et la dérivation, f étant explicite, ce résultat est surtout utile pour intégrer sur un segment la somme d'une série de fonctions qui, elle, n'est pas explicite en général.

⚠ Ce résultat ne vaut que pour une intégration sur un segment. On pourra regarder $\int_0^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}}\,dt$

Pour les intégrales généralisées (intégration sur un intervalle quelconque), on a recours au théorème suivant :

[2]. Si f n'est pas continue sur I **et si les f_n sont continues sur** I, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f

Propriété (Théorème de convergence dominée)**.**

Si

- les f_n sont continues par morceaux sur I
- la suite de fonctions $\left(f_n\right)$ converge simplement sur I vers f, également continue par morceaux sur I
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$
  où φ désigne une fonction positive et continue par morceaux sur I telle que $\int_I \varphi(t)dt$ converge

Alors

$\int_I f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt$ autrement dit « l'intégrale de la limite est la limite des intégrales ».

Remarques.

- La troisième hypothèse est appelée « hypothèse de domination »
- on peut se contenter d'une domination à partir d'un certain rang

Exemple. La suite numérique de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$ converge vers $\frac{e-1}{e}$.